

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД  
«ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА  
ШЕВЧЕНКА»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій

Кафедра математики та інформатики

**Гурин Ольга Сергіївна**


**НАПІВГРУПИ ЕНДОМОРФІЗМІВ ВІЛЬНИХ МОНОГЕННИХ  
ТРІОЇДІВ**


**кваліфікаційна робота**


**здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня**

**освітньої програми «Алгебра та теорія чисел»**

**за спеціальністю 111 Математика**

Особистий підпис  \_Ольга ГУРИН

Науковий керівник  \_Юрій ЖУЧОК,  
доктор фізико-математичних наук,  
професор кафедри математики та  
інформатики

В.о. завідувача кафедри  \_Юрій КОЗУБ,  
доктор технічних наук, професор  
кафедри математики  
та інформатики

## **ЗМІСТ**

<b>ВСТУП.....</b>	<b>3</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ВІЛЬНІ ТРІОЇДИ.....</b>	<b>5</b>
1.1. Напівгрупи та їх властивості.....	5
1.2. Поняття тріоїда, приклади.....	10
1.3. Конструкція вільного тріоїда.....	12
<b>Висновки до розділу 1.....</b>	<b>16</b>
<b>РОЗДІЛ 2. НАПІВГРУПИ ЕДОМОРФІЗМІВ ТА ВІЛЬНІ КОМУТАТИВНІ ТРІОЇДИ .....</b>	<b>17</b>
2.1. Поняття ендоморфізму напівгрупи .....	17
2.2. Вільний комутативний моногенний тріоїд.....	30
2.3. Моноїд ендоморфізмів вільного комутативного тріоїда рангу 1.....	34
<b>Висновки до розділу 2.....</b>	<b>38</b>
<b>РОЗДІЛ 3. НАПІВГРУПИ ЕНДОМОРФІЗМІВ ВІЛЬНИХ МОНОГЕННИХ ТРІОЇДІВ.....</b>	<b>39</b>
3.1. Ендоморфізми вільного тріоїда рангу 1.....	40
3.2. Абстрактні характеристики моноїда ендоморфізмів.....	44
3.3. Проблема визначеності тріоїдів ендоморфізмами.....	45
<b>Висновки до розділу 3.....</b>	<b>48</b>
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>49</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>50</b>

## Вступ

**Актуальність дослідження.** Одним із змістовних класів алгебраїчних систем є клас тріюїдів. Множина (векторний простір)  $T$ , наділена (наділений) трьома бінарними асоціативними операціями  $\dashv$ ,  $\vdash$  та  $\perp$ , що задовольняють наступним умовам:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (T1)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (T2)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (T3)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \quad (T4)$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \quad (T5)$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \quad (T6)$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \quad (T7)$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \quad (T8)$$

для всіх  $x, y, z \in T$ , називається тріюїдом (триалгеброю). Вивчення цих класів алгебри почалося з оригінальної праці Ж.-Л. Лоде та М.О. Ронко і наразі вони знаходять широке застосування в теорії алгебри Лейбніца, а також алгебраїчній топології. Тріюїди та триалгебри взаємодіють із такими важливими алгебраїчними структурами, як алгебри Хопфа, алгебри Лі та оператори Рота–Бакстера. Значний інтерес до тріюїдів пояснюється їхнім взаємозв'язком із дімоноїдами. Якщо певні операції двох тріюїдів (триалгебр) співпадають, то виникає поняття дімоноїда (діалгебри), введене Ж.-Л. Лоде в контексті вивчення феномену періодичності в алгебраїчній К-теорії. Дослідження властивостей напівгруп ендоморфізмів вільних моногенних тріюїдів має важливе значення у вивченні взаємодій між елементами цих алгебраїчних систем. Заслуговує на увагу також той факт, що вивчення класу тріюїдів може сприяти розвитку загальних теоретичних концепцій у математиці та знаходженню застосувань теорії тріюїдів у різних областях

науки. Таким чином, все зазначене вище свідчить про актуальність дослідження вільних моногенних (комутативних) тріоїдів за допомогою їх напівгруп ендоморфізмів.

**Мета та завдання роботи:** Метою дослідження є систематизація матеріалу щодо вивчення вільних алгебр для спеціального класу структур – тріоїдів – алгебр з трьома бінарними асоціативними операціями, які задовольняють певним додатковим вимогам. Основні завдання роботи – вивчення напівгруп ендоморфізмів вільних моногенних тріоїдів та використання нових моделей вільного комутативного моногенного тріоїда.

**Методи дослідження:** Для проведення дослідження використані загально алгебраїчні методи, базовані на основних принципах теорії напівгруп. Унікальність цих методів полягає в їх адаптації до алгебр з трьома операціями.

**Практичне та теоретичне значення одержаних результатів:** Робота є теоретичного характеру. Отримані в цьому дослідженні результати мають важливе теоретичне значення та сприятимуть подальшому розвитку теорії тріоїдів та теорії напівгруп, зокрема, напівгрупам ендоморфізмів вільних тріоїдів. Результати можуть бути використані також для проведення факультативних занять з математики для старшокласників.

**Структура роботи.** Робота складається з вступу, трьох розділів, висновків до розділів, загального висновку, списку використаних джерел та додатків. У першому розділі введено необхідні поняття та розглянуто конструкцію вільного тріоїду. У другому розділі введено поняття напівгрупи ендоморфізмів та розглянуто деякі характеристики вільних комутативних моногенних тріоїдів. У третьому розділі розглянуто напівгрупи ендоморфізмів вільних моногенних тріоїдів та їх абстрактні характеристики.

# РОЗДІЛ 1. ВІЛЬНІ ТРІОЇДИ

## 1.1. Напівгрупи та їх властивості.

Моногенні тріоїди є важливою абстрактною алгебраїчною структурою, яка знаходить застосування у різних галузях математики.

Розглянемо основи на яких базується поняття тріоїда.

Замкнутість це властивість алгебраїчних структур, яка означає, що результат будь-якої операції в цій структурі знову належить до цієї самої структури. Конкретно для бінарної операції  $x$  на множині  $S$  це виглядає так: для всіх  $a, b$  з множини  $S$ , результат операції  $a * b$  належить знову  $S$ . Замкнутість є важливою властивістю для будь-якої алгебраїчної структури, оскільки вона гарантує, що операції в межах цієї структури залишаються коректними та визначеними.

Асоціативність це властивість бінарної операції  $(*)$  в алгебраїчних структурах, яка означає, що порядок виконання операцій не впливає на результат операції. Формально це виглядає так:

- для всіх  $a, b, c$  з множини  $S$ , вираз  $(a * b) * c$  дорівнює  $a * (b * c)$ .

Це означає, що ви можете обирати будь-який порядок виконання операцій множення  $(*)$  між елементами  $a, b$  і  $c$  у моногенному тріоїді, і результат завжди буде однаковим. Ця властивість дуже важлива для багатьох алгебраїчних структур, оскільки вона забезпечує консистентність виконання операцій та дозволяє спрощувати вирази без необхідності додаткового уточнення порядку операцій.

Ідемпотентність це властивість елементів алгебраїчної структури, яка означає, що кожен елемент, який є ідемпотентом, залишається незмінним при операції з самим собою. Ця властивість виглядає так, що для кожного  $a$  з  $S$ ,  $a * a = a$ .

Це означає, що якщо елемент помножити на сам на себе, результат завжди буде самим елементом  $a$ . Ідемпотентність може вказувати на те, що даний елемент є "стійким" або "незмінним" відносно даної операції в межах даної структури. Ця властивість може мати важливі застосування в різних математичних і прикладних контекстах.

Ліва та права ідентичність - це властивості алгебраїчної структури, які вказують на наявність елементу, який діє як ідентичний елемент відносно бінарної операції  $(*)$  з обох сторін, а саме:

- ліва ідентичність - існує елемент  $e$  в  $S$  такий, що для всіх,  $a \in S$ ,  $e * a = a$ .
- права ідентичність - існує елемент  $e$  в  $S$  такий, що для всіх,  $a \in S$ ,  $a * e = a$ .

Іншими словами, для існування лівої ідентичності, ми шукаємо такий елемент  $e$ , що при множенні на нього зліва (зліва від елемента  $a$ ) результат не змінюється. Аналогічно, для існування правої ідентичності, ми шукаємо елемент  $e$ , що при множенні на нього справа (справа від елемента  $a$ ) результат залишається незмінним.

Якщо обидві ідентичності існують, і цей спільний елемент  $e$  збігатися з обидвома ідентичними елементами (зліва і справа), то він називається просто "ідентичним елементом або одиничним" для даної операції  $(*)$  в моногенному тріюїді.

Комплексність - це властивість алгебраїчної структури, яка означає, що для будь-яких двох елементів  $a$  і  $b$  в цій структурі існує третій елемент  $x$ , який, помножений на  $a$ , дає  $b$ . Формально це можна записати так: для кожних  $a, b$  з алгебраїчної структури  $S$ , існує  $x \in S$  такий, що  $a * x = b$ . Ця властивість означає, що ви можете "знайти" елемент  $x$ , який відповідає певному математичному зв'язку між  $a$  і  $b$ , якщо такий зв'язок існує в межах даної структури.

Напівгрупа - це алгебраїчна структура, яка складається з множини елементів разом із бінарною асоціативною операцією. Вона є менш

обмеженою структурою порівняно з групою, оскільки не всі елементи напівгрупи повинні мати оберненні елементи.

Основні властивості напівгрупи включають: множина елементів ( $S$ ) напівгрупа містить в собі множину елементів, які можуть бути позначені, наприклад, як  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і так далі. Основні властивості цієї множини включають:

- непорожність - множина  $S$  повинна бути непорожньою, тобто містити хоча б один елемент.
- дискретність - множина  $S$  може бути скінченною або нескінченною, але вона повинна бути обмеженою в рамках даної конкретної напівгрупи.
- специфічний характер - елементи множини  $S$  можуть представляти певний клас об'єктів або операцій, залежно від контексту. Наприклад, в моноїді, що є спеціальним видом напівгрупи, множина  $S$  являє собою множину елементів, які мають одиницю.
- доступність операції - елементи множини  $S$  повинні бути "сумісні" з бінарною операцією ( $*$ ), тобто операція ( $*$ ) має бути визначена для будь-якої пари елементів з множини  $S$ . Тобто для всіх  $a, b \in S$ , результат  $a * b$  має бути визначеним і належати до  $S$ .

Ці властивості множини  $S$  визначають базові характеристики множини, яка є основою для будь-якої напівгрупи. Множина  $S$  визначає, над якими елементами будуть виконуватися бінарні операції в рамках даної напівгрупи.

Бінарна операція ( $*$ ) - напівгрупа має бінарну операцію ( $*$ ), яка об'єднує два елементи  $a$  і  $b$ , і повертає результат, позначений  $a * b$ .

Властивість бінарна операція ( $*$ ) визначає специфікацію операції, яка використовується для комбінування двох елементів множини  $S$  в напівгрупі.

Основні властивості бінарної операції ( $*$ ) включають:

- замкнутість - для всіх  $a, b \in S$ , результат  $a * b$  також належить до  $S$ . Це означає, що операція ( $*$ ) не виходить за межі множини  $S$ . Формально:  $a, b \in S \Rightarrow a * b \in S$ .

- Асоціативність - для всіх  $a, b, c$  з множини  $S$ , вираз  $(a * b) * c$  дорівнює  $a * (b * c)$ . Ця властивість гарантує, що порядок виконання операцій не впливає на результат. Формально:  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .
- абсолютність (ідемпотентність) - операція  $(*)$  може бути абсолютною (ідемпотентною), якщо для кожного  $a$  з множини  $S$  виконується  $a * a = a$ . Ця властивість означає, що комбінування елемента сам з собою не змінює результату.
- комутативність (не обов'язкова)\*\* - операція  $(*)$  може бути комутативною, якщо для всіх  $a, b$  з множини  $S$  виконується  $a * b = b * a$ . Ця властивість означає, що порядок елементів в операції не впливає на результат.
- існування одиниці (не обов'язкова)\*\* - деякі напівгрупи мають спеціальний елемент, називаний "одиницею", такий що для всіх  $a$  з множини  $S$ ,  $\text{одиниця} * a = a * \text{одиниця} = a$ .

Важливо враховувати, що не всі напівгрупи є комутативними та не всі мають одиницю. Властивості бінарної операції  $(*)$  визначають структуру і властивості конкретної напівгрупи та визначають, як операція комбінує елементи її множини.

Напівгрупи допомагають досліджувати властивості бінарних операцій та відношень між елементами множини. Наведемо декілька прикладів напівгруп.

#### 1. Натуральні числа з операцією мінімуму:

- множина елементів ( $S$ ) - множина всіх натуральних чисел ( $N$ ).
- бінарна операція  $(*)$  - операція мінімуму ( $\min$ ) - результат  $a * b$  дорівнює меншому з чисел  $a$  і  $b$ .
- Замкнутість - мінімум двох натуральних чисел є натуральним числом, тому замкнутість виконана.
- асоціативність мінімуму - є асоціативною операцією, оскільки порядок мінімумів не впливає на результат.



- Ідемпотентність - кожне натуральне число,  $a$  є ідемпотентним, оскільки  $a * a = a$ .

## 2. Множина булевих функцій з операцією кон'юнкції (логічне І):

- множина елементів (S) - множина всіх булевих функцій над двома змінними.
- бінарна операція (\*) - операція кон'юнкції (логічне І) - результат  $a * b$  є булевою функцією, яка повертає true, якщо обидва операнди  $a$  і  $b$  повертають true.
- Замкнутість - кон'юнкція булевих функцій також є булевою функцією, тому замкнутість виконана.
- Асоціативність - кон'юнкція є асоціативною операцією.
- Ідемпотентність - кожна булева функція є ідемпотентною, оскільки  $\text{true} * \text{true} = \text{true}$ .

## 3. Множина матриць розмірності $n \times n$ з операцією матричного множення.

Множина елементів (S):

- множина всіх квадратних матриць розмірності  $n \times n$ .
- бінарна операція (\*) - операція матричного множення - результат  $a * b$  є матрицею, яка обчислюється відповідно до правил матричного множення.
- Замкнутість - матричне множення двох квадратних матриць завжди дає квадратну матрицю, тому замкнутість виконана.
- асоціативність: матричне множення є асоціативною операцією.
- Ідемпотентність - не кожна матриця є ідемпотентною, але деякі матриці можуть бути, наприклад, одинична матриця.

Це лише кілька прикладів напівгруп з різними множинами елементів та операціями. Властивості замкнутості, асоціативності та ідемпотентності можуть варіюватися в залежності від конкретного прикладу.

## 1.2. Поняття тріюїда, приклади.

Тріюїди були введені Ж.-Л. Лоде і М.О. Ронко в [1] для вивчення тернарних планарних дерев. Алгебраїчна система  $(T, \dashv, \vdash, \perp)$  з трьома бінарними асоціативними операціями  $\dashv$ ,  $\vdash$  та  $\perp$  називається *тріюїдом*, якщо для всіх  $x, y, z \in T$  виконуються умови:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (T1)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (T2)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (T3)$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \dashv (y \perp z), \quad (T4)$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \quad (T5)$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \quad (T6)$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \quad (T7)$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \quad (T8)$$

Триалгебри і тріюїди, які є основою триалгебр, вивчалися в різних роботах (див., напр., [1–7]). Поняття тріюїду тісно пов'язано з поняттям дімоноїду, яке, як було зазначено вище, відіграє важливу роль при розв'язанні актуальних проблем теорії алгебр Лейбніца. Відмітимо, що якщо всі операції тріюїду або дімоноїду збігаються, то ми отримуємо напівгрупу. Якщо збігаються операції  $\vdash$  та  $\perp$  тріюїду  $(T, \dashv, \vdash)$  то він перетворюється у дімоноїд. Таким чином, тріюїди і дімоноїди є узагальненням напівгруп, до того ж, тріюїди є узагальненням дімоноїдів.

Дамо далі кілька прикладів тріюїдів.

**Приклад 1.1.** Нехай  $S$  — напівгрупа,  $f$  — її ідемпотентний ендоморфізм. Визначимо на  $S$  три операції  $\dashv$ ,  $\vdash$  та  $\perp$ , поклавши для всіх  $x, y \in S$  таке:

$$x \dashv y = x (y f), \quad x \vdash y = (x f) y, \quad x \perp y = (xy)f.$$

Алгебра  $(S, \dashv, \vdash, \perp)$  є тріюїдом.

**Приклад 1.2.** Нехай  $(S, \perp)$  — довільна напівгрупа. Визначимо на  $S$  операції  $\dashv$  і  $\vdash$  за правилами:

$$x \dashv y = x, \quad x \vdash y = y$$

для всіх  $x, y \in S$ .

Тоді алгебра  $(S, \dashv, \vdash, \perp)$  є трієюдом.

**Приклад 1.3.** Нехай  $X^+$  — вільна напівгрупа, породжена множиною  $X$ . Якщо  $w \in X^+$ , то через  $w^{(0)}(w^{(1)})$  будемо позначати першу (відпов. останню) літеру слова  $w$ .

Визначимо на множині  $X^+$  операції  $\dashv$ ,  $\vdash$  і  $\perp$ , поклавши

$$w \dashv u = uw^{(0)}w^{(1)}, \quad w \vdash u = uw^{(0)}w^{(1)}, \quad w \perp u = w^{(0)}u^{(1)}$$

для всіх  $w, u \in X^+$ .

Тоді алгебра  $(X^+, \dashv, \vdash, \perp)$  є трієюдом.

Наприкінці цього підрозділу розглянемо конструкцію вільного моногенного трієюда, визначену Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко.

Нехай  $[n-1] = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Множина непорожніх підмножин множини  $[n-1]$  позначається через  $P_n$ , а множина всіх підмножин (як елементів) з  $P_n$  потужності  $k$  — через  $P_{n,k}$ . Таким чином,  $P_n = P_{n,1} \cup P_{n,2} \cup \dots \cup P_{n,k}$ .

Позначимо через

$$bij: [i_1-1] \cup [i_2-1] \cup \dots \cup [i_n-1] \rightarrow [i_1+i_2+\dots+i_n-1]$$

бієкцію, яка відображає  $k \in [i_j-1]$  в  $i_1+i_2+\dots+i_{j-1}+k \in [i_1+i_2+\dots+i_n-1]$ .

**Теорема 1.4.** Вільний трієюд на одному породжучому елементі  $x$  є ізоморфним трієюду  $P = \bigcup_{n \geq 1} P_n$ , наділеному такими операціями:

$$X \dashv Y = bij(X), \quad X \vdash Y = bij(Y), \quad X \perp Y = bij(X \cup Y),$$

де  $X \in P_p, Y \in P_q$  і  $bij: [p-1] \times [q-1] \rightarrow [p+q-1]$ .

Більш загальну інформацію про трієюди, а також інші приклади трієюдів, можна знайти, наприклад, у роботах [1,2,7,8,9].

### 1.3. Конструкція вільного тріюїда.

Нехай  $\mathfrak{T}_1 = (T_1, \dashv_1, \vdash_1, \perp_1)$  і  $\mathfrak{T}_2 = (T_2, \dashv_2, \vdash_2, \perp_2)$  — довільні тріюїди. Відображення  $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$  називається *гомоморфізмом*  $\mathfrak{T}_1$  в  $\mathfrak{T}_2$ , якщо для всіх  $x, y \in T_1$  виконуються умови:

$$(x \dashv_1 y)\varphi = x\varphi \dashv_2 y\varphi, \quad (x \vdash_1 y)\varphi = x\varphi \vdash_2 y\varphi, \quad (x \perp_1 y)\varphi = x\varphi \perp_2 y\varphi.$$

Бієктивний гомоморфізм  $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$  називається *ізоморфізмом* тріюїда  $\mathfrak{T}_1$  на  $\mathfrak{T}_2$ . Якщо  $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$  — ізоморфізм тріюїдів  $\mathfrak{T}_1$  та  $\mathfrak{T}_2$ , то ці тріюїди називають *ізоморфними*.

Нехай  $X$  — довільна непорожня множина,  $\bar{X} = \{\bar{x} \mid x \in X\}$  і  $Ft^+(X)$  — вільна напівгрупа на множині  $X \cup \bar{X}$ . Через  $Ft(X)$  позначимо підмножину з  $Ft^+(X)$ , яка складається зі слів, які містять в своєму записі принаймні один символ  $\bar{x}$  ( $x \in X$ ). Для кожного  $w \in Ft(X)$  через  $\tilde{w}$  позначимо слово, отримане з  $w$  заміною кожного елемента  $\bar{x}$ ,  $x \in X$ , на  $x$ . Наприклад, якщо  $w = x\bar{x}x\bar{x}x\bar{y}\bar{z}$ , то  $\tilde{w} = xxxxxxyz$ .

На множині  $Ft(X)$  визначимо три бінарні операції за правилами:

$$u \dashv v = u\tilde{v}, \quad u \vdash v = \tilde{u}v, \quad u \perp v = uv.$$

**Твердження 1.5.** *Алгебраїчна система  $(Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$  є вільним тріюїдом рангу  $|X|$ .*

*Доведення.* Зрозуміло, що операції  $\dashv$ ,  $\vdash$  та  $\perp$  є асоціативними. Крім того, для всіх  $u, v, w \in Ft(X)$  виконуються аксіоми тріюїда  $(T_1)$ – $(T_8)$ :

$$(u \dashv v) \dashv w = u\tilde{v}\tilde{w} = u\tilde{v\tilde{w}} = u \dashv (v \vdash w),$$

$$(u \vdash v) \dashv w = \tilde{u}v\tilde{w} = u \vdash (v \dashv w),$$

$$(u \dashv v) \vdash w = \tilde{u}\tilde{v}w = \tilde{u\tilde{v}}w = u \vdash (v \vdash w),$$

$$(u \dashv v) \perp w = u\tilde{v}\tilde{w} = u\tilde{v\tilde{w}} = u \dashv (v \perp w),$$

$$(u \perp v) \dashv w = uv\tilde{w} = u \perp (v \dashv w),$$

$$(u \dashv v) \perp w = u\tilde{v}w = u \perp (v \vdash w),$$

$$(u \vdash v) \perp w = \tilde{u}vw = u \vdash (v \perp w),$$

$$(u \perp v) \vdash w = \widetilde{u}\widetilde{v}w = \widetilde{u}\widetilde{v}w = u \vdash (v \vdash w).$$

Покажемо тепер, що тріюїд  $(Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$  — вільний. Аналогічно тому як для елементів вільного тріюїда рангу 1, довільний елемент  $w \in Ft(X)$  представляється одним з таких двох способів:

$$\begin{aligned} w &= u_1^{(0)} u_2^{(0)} \dots u_{k_0}^{(0)} u_1^{(1)} u_2^{(1)} \dots u_{k_1}^{(1)} \overline{u_1^{(2)}} u_2^{(2)} \dots u_{k_2}^{(2)} \dots u_{k_{j-1}}^{(j-1)} \overline{u_1^{(j)}} u_2^{(j)} \dots u_{k_j}^{(j)} = \\ &= (\overline{u_1^{(0)}} \vdash \dots \vdash \overline{u_{k_0}^{(0)}}) \vdash (\overline{u_1^{(1)}} \neg \dots \neg \overline{u_{k_1}^{(1)}}) \perp \dots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \neg \dots \neg \overline{u_{k_j}^{(j)}}), \end{aligned}$$

де  $u_l^{(i)} \in X$ ,  $1 \leq l \leq k_i$  для всіх  $i \in \{0, 1, \dots, j\}$ , або

$$\begin{aligned} w &= \overline{u_1^{(1)}} u_2^{(1)} \dots u_{k_1}^{(1)} \overline{u_1^{(2)}} u_2^{(2)} \dots u_{k_2}^{(2)} \dots u_{k_{j-1}}^{(j-1)} \overline{u_1^{(j)}} u_2^{(j)} \dots u_{k_j}^{(j)} = \\ &= (\overline{u_1^{(1)}} \neg \dots \neg \overline{u_{k_1}^{(1)}}) \perp (\overline{u_1^{(2)}} \neg \dots \neg \overline{u_{k_2}^{(2)}}) \perp \dots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \neg \dots \neg \overline{u_{k_j}^{(j)}}), \end{aligned}$$

де  $u_l^{(i)} \in X$ ,  $1 \leq l \leq k_i$  для всіх  $i \in \{1, 2, \dots, j\}$ .

Нехай  $(T', \neg', \vdash', \perp')$  — довільний тріюїд. Кожний гомоморфізм  $\Phi$  вільного тріюїда  $(Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$  у тріюїд  $(T', \neg', \vdash', \perp')$  однозначно визначається відображенням  $\varphi: \overline{X} \rightarrow T'$ . Для того щоб задати  $\Phi$ , достатньо для указаних вище двох видів елементів  $w \in Ft(X)$  покласти

$$\begin{aligned} w\Phi &= (\overline{u_1^{(0)}} \varphi \vdash' \overline{u_2^{(0)}} \varphi \vdash' \dots \vdash' \overline{u_{k_0}^{(0)}} \varphi) \vdash' (\overline{u_1^{(1)}} \varphi \neg' \overline{u_2^{(1)}} \varphi \neg' \dots \neg' \overline{u_{k_1}^{(1)}} \varphi) \perp' \\ &\quad \perp' \dots \perp' (\overline{u_1^{(j)}} \varphi \neg' \overline{u_2^{(j)}} \varphi \neg' \dots \neg' \overline{u_{k_j}^{(j)}} \varphi) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} w\Phi &= (\overline{u_1^{(1)}} \varphi \neg' \overline{u_2^{(1)}} \varphi \neg' \dots \neg' \overline{u_{k_1}^{(1)}} \varphi) \perp' (\overline{u_1^{(2)}} \varphi \neg' \overline{u_2^{(2)}} \varphi \neg' \dots \neg' \overline{u_{k_2}^{(2)}} \varphi) \perp' \\ &\quad \perp' \dots \perp' (\overline{u_1^{(j)}} \varphi \neg' \overline{u_2^{(j)}} \varphi \neg' \dots \neg' \overline{u_{k_j}^{(j)}} \varphi). \end{aligned}$$

Далі доведення цього твердження є таким самим, як доведення відповідного твердження для вільного тріюїда рангу 1.  $\square$

Елементи з  $Ft(X)$  називаються *словами*, а  $\overline{X}$  — *породжуючою множиною* вільного тріюїда  $(Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$ . Через  $l(\omega)$  позначається *довжина*

слова  $\omega \in Ft(X)$ . Вільний тріюїд  $(Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$  на  $n$ -елементній множині  $X$  будемо позначати через  $Ft_n$ .

Зокрема, для  $X = \{x\}$  маємо

$$Ft(X) = \{\bar{x}, \bar{x}x, x\bar{x}, \bar{x}\bar{x}, \bar{x}xx, x\bar{x}x, xx\bar{x}, \bar{x}\bar{x}x, x\bar{x}\bar{x}, \bar{x}x\bar{x}, \bar{x}x\bar{x}, \dots\}.$$

Зауважимо, що ендоморфізм  $\Phi$  вільного тріюїда  $(Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$  є автоморфізмом тоді й лише тоді, коли обмеження  $\Phi$  на множині  $X$  належить симетричній групі  $S(X)$ . Отже, група автоморфізмів  $Aut(Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$  ізоморфна групі  $S(X)$ .

Тепер побудуємо новий тріюїд, який ізоморфний вільному тріюїду ранга 1. Нехай  $k \in N$  та  $I_k = \{1, 2, \dots, k\}$ . Через  $U(I_k)$  позначимо множину всіх непорожніх підмножин множини  $I_k$ . Для непорожніх  $A, B \subseteq N$  покладемо

$$A \pm B = \{a \pm b \mid a \in A, b \in B\}, \quad AB = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Якщо  $B = \{b\}$ , то замість  $A \pm \{b\}$  (відповідно  $A\{b\}$ ) будемо писати  $A \pm b$  ( $Ab$ ).

На множині  $P = \bigcup_{k \in N} (\{k\} \times U(I_k))$  визначимо три операції  $\neg', \vdash'$  і  $\perp'$  за правилами:

$$(n, A) \neg' (m, B) = (n + m, A),$$

$$(n, A) \vdash' (m, B) = (n + m, B + n),$$

$$(n, A) \perp' (m, B) = (n + m, A \cup (B + n)).$$

**Твердження 1.6.** *Алгебраїчна система  $(P, \neg', \vdash', \perp')$  ізоморфна вільному тріюїду  $Ft_1$  ранга 1.*

*Доведення.* Нехай  $\{\bar{x}\}$  — породжуюча множина тріюїда  $Ft_1$ . Визначимо відображення  $\varphi$  тріюїда  $Ft_1$  у множину  $P$  за правилом:

$$\varphi: w = x_1 x_2 \dots x_s \mapsto (l(w), \bigcup_{i=1}^s x_i^*),$$

де  $x_i^* = \{i\}$ , якщо  $x_i = \bar{x}$ , і  $x_i^* = \emptyset$  в інших випадках. Очевидно,  $\varphi$  є бієкцією.

Нехай  $u = u_1 u_2 \dots u_s$ ,  $v = v_1 v_2 \dots v_t \in Ft_1$ . Тоді

$$\begin{aligned}
(u \dashv v)\varphi &= (u_1 u_2 \dots u_s \underbrace{xx \dots x}_t)\varphi = (s + t, \bigcup_{i=1}^s u_i^*) = \\
&= (s, \bigcup_{i=1}^s u_i^*) \dashv' (t, \bigcup_{j=1}^t v_j^*) = u\varphi \dashv' v\varphi, \\
(u \vdash v)\varphi &= (\underbrace{xx \dots x}_s v_1 v_2 \dots v_t)\varphi = (s + t, (\bigcup_{i=1}^t v_i^*) + s) = \\
&= (s, \bigcup_{i=1}^s u_i^*) \vdash' (t, \bigcup_{j=1}^t v_j^*) = u\varphi \vdash' v\varphi, \\
(u \perp v)\varphi &= (u_1 u_2 \dots u_s v_1 v_2 \dots v_t)\varphi = \\
&= (s + t, (\bigcup_{i=1}^s u_i^*) \cup ((\bigcup_{j=1}^t v_j^*) + s)) = \\
&= (s, \bigcup_{i=1}^s u_i^*) \perp' (t, \bigcup_{j=1}^t v_j^*) = u\varphi \perp' v\varphi. \quad \square
\end{aligned}$$

Тріюїдна конструкція  $(P, \dashv', \vdash', \perp')$  більш зручніша в порівнянні з іншими конструкціями тріюїда, ізоморфними  $Ft_1$  (див. [1]). З точністю до позначень конструкція вільного тріюїда з [1] визначена на множині  $P' = \bigcup_{k \in N} U(I_k)$ . У цьому випадку для довільного елемента з множини  $P'$  не зрозуміло яке саме слово тріюїда  $Ft_1$  йому відповідає, тобто яка довжина такого слова. Конструкція ж вільного тріюїда є дещо громіздкою на відміну від тріюїда  $(P, \dashv', \vdash', \perp')$ .

Далі будемо ототожнювати вільний тріюїд  $Ft_1$  рангу 1 з отриманим тріюїдом  $(P, \dashv', \vdash', \perp')$ , використовуючи символи операцій, що використовуються на тріюїді  $Ft_1$ .

## **Висновки до розділу 1**

В цьому розділі визначено ключові поняття та ведено позначення, які використовуються в дослідженні. Ведено основні відомості з теорії напівгруп і теорії тріюїдів. Представлено конкретні приклади тріюїдів та напівгруп, зокрема.



## РОЗДІЛ 2.

### НАПІВГРУПИ ЕДОМОРФІЗМІВ ТА ВІЛЬНІ КОМУТАТИВНІ ТРІОЇДИ

#### 2.1. Поняття ендоморфізму напівгрупи

Поняття ендоморфізмів у напівгрупах та їх важливі характеристики є ключовими для розуміння структури та властивостей цих алгебраїчних структур.

Напівгрупа - це множина разом із бінарною операцією, яка може бути не комутативною ( $a * b$  не завжди дорівнює  $b * a$ ).

Ендоморфізм - це функція, яка відображає множину на себе та зберігає бінарну операцію. Розглянемо поняття ендоморфізмів та їх важливі характеристики докладніше. Визначення напівгрупи та бінарної операції (\*).

Напівгрупа - це алгебраїчна структура, що складається з множини елементів разом із бінарною операцією і відповідає певним властивостям. Основними властивостями напівгрупи є замкнутість, асоціативність та ідемпотентність.

Бінарна операція (\*) - це операція, яка об'єднує два елементи з множини й повертає третій елемент з цієї ж множини. У випадку напівгрупи, бінарна операція (\*) має задовольняти наступну властивість:

Для всіх  $a, b, c$  з множини  $S$ , результат  $a * (b * c)$  належить до  $S$ .

Це означає, що операція (\*) повинна бути замкнутою в напівгрупі, і вона повинна бути асоціативною, тобто порядок виконання операцій не впливає на результат. Формальне визначення напівгрупи полягає в наступному. Напівгрупа - задовольняє наступні властивості.

1. Замкнутість (Закон замкненості): для всіх  $a, b$  з  $S$ , результат  $a * b$  належить до  $S$ . Іншими словами, операція (\*) зберігає елементи в множині  $S$ .

2. Асоціативність: для всіх  $a, b, c \in S$ , вираз  $(a * b) * c$  дорівнює  $a * (b * c)$ . Це означає, що порядок застосування операцій не впливає на результат.
3. Ідемпотентність: для кожного  $a \in S$ ,  $a * a = a$ . Це означає, що кожен елемент  $S$  є ідемпотентним відносно операції  $(*)$ .

Це визначення відображає основні властивості та обмеження, які характеризують напівгрупу. Важливо враховувати, що в напівгрупі відсутні обов'язково ідентичний елемент (одичний елемент), інверсії (оберненість) і комутативність (змінення порядку операцій) не вимагаються.

Ендоморфізм у напівгрупі - це функція, яка відображає множину напівгрупи на себе, зберігаючи бінарну операцію, яка визначена на цій напівгрупі.

Більш формально, нехай  $(S, *)$  - це напівгрупа, де  $S$  - множина, а  $*$  - бінарна операція на цій множині. Тоді ендоморфізмом на цій напівгрупі є функція  $f: S \rightarrow S$ , яка виконує наступну властивість для всіх  $a$  та  $b$  з множини  $S$ :

$$f(a * b) = f(a) * f(b)$$

Це означає, що використання функції  $f$  на результаті операції  $(*)$  для двох елементів дорівнює результату операції  $(*)$  між елементами  $f(a)$  і  $f(b)$ . Іншими словами, функція  $f$  зберігає структуру напівгрупи  $S$  та відображає елементи  $S$  на себе так, що операція  $(*)$  залишається валідною.

Ендоморфізми у напівгрупах важливі для вивчення властивостей та дослідження структури цих алгебраїчних об'єктів. Вони використовуються в різних галузях математики, включаючи теорію графів, криптографію, теорію автоматів та інші.

Пояснення, що таке функція  $f: S \rightarrow S$  і як вона діє на елементах множини  $S$ . Функція  $f: S \rightarrow S$  - це математичне відображення або правило, яке

призначено для відображення кожного елемента множини  $S$  на інший елемент цієї ж множини.

Розгляньмо це більш детально:

- $f$  це символ, який позначає функцію.
- $S$  це множина, на яку відображається функція  $f$ . В інших словах, це множина, з якої беруться початкові елементи.
- $\rightarrow$  цей символ позначає "відображається в". Він вказує на те, що функція  $f$  відображає елементи з множини  $S$  в множину  $S$ .
- $f(a)$  це значення, яке функція  $f$  надає елементу  $a$  з множини  $S$  після відображення. Інакше кажучи,  $f(a)$  - це результат дії функції  $f$  на елементі  $a$ .

Функція  $f$  діє на елементах множини  $S$  шляхом визначення відповідності між початковими елементами множини  $S$  та їх відображеними значеннями у тій же самій множині  $S$ . Наприклад, якщо  $S$  - множина цілих чисел, то функція  $f$  може бути визначена як  $f(x) = x + 1$ . Це означає, що для кожного цілого числа  $x$ , функція  $f$  відображає його на  $x + 1$ .

У контексті ендоморфізму у напівгрупі, функція  $f: S \rightarrow S$  діє на елементах множини  $S$  таким чином, що вона відображає кожен елемент на інший елемент з тієї ж множини  $S$ , зберігаючи бінарну операцію, яка визначена на цій напівгрупі. Тобто,  $f(a * b) = f(a) * f(b)$  для всіх  $a$  та  $b$  з множини  $S$  тематики, включаючи теорію графів, криптографію, теорію автоматів та інші.

Основні властивості замкнутість ендоморфізмів.

Замкнутість ендоморфізмів є важливою характеристикою, оскільки вона визначає, чи залишаються результати дій ендоморфізмів всередині напівгрупи. Тобто, якщо ендоморфізм зберігає елементи множини й операцію, то він залишається корисним й в рамках дослідження структури напівгрупи та при застосуванні в різних математичних і практичних задачах. Розглянемо цю важливість замкнутості на прикладах.

Приклад 1: цілі числа й операція додавання (+)

Нехай ми маємо напівгрупу, яка складається з цілих чисел і бінарної операції додавання (+). Тобто,  $S = \{\text{цілі числа}\}$ , і операція  $a * b$  визначена як

$$a + b \text{ для всіх } a, b \in S.$$

Тепер розглянемо ендоморфізм  $f(x) = 2x$ , де  $x$  - ціле число. Цей ендоморфізм відображає кожне ціле число на його подвоєне значення. Наприклад,

$$f(3) = 6, \quad f(-2) = -4.$$

Замкнутість в цьому випадку означає, що результат дії ендоморфізму  $f$  на будь-яких двох цілих числах також буде цілим числом. Наприклад,  $f(3) + f(-2) = 6 + (-4) = 2$  - це ціле число. Отже, ендоморфізм  $f$  є замкнутим відносно операції додавання у напівгрупі цілих чисел.

Приклад 2: Дійсні числа та операція множення (\*)\*\*

Нехай  $S$  - множина дійсних чисел, а операція  $a * b$  визначена як множення  $a$  на  $b$  для всіх  $a, b \in S$ . Розглянемо ендоморфізм  $g(x) = x^2$ , де  $x$  - дійсне число.

Замкнутість в цьому випадку означає, що якщо ми використовуємо ендоморфізм  $g$  для дійсних чисел, то результат буде також дійсним числом. Наприклад,  $g(2) = 2^2 = 4$  - це дійсне число.

Замкнутість є важливою в математичних та наукових дослідженнях, оскільки вона дозволяє використовувати ендоморфізми для вивчення властивостей та обробки даних у межах даної алгебраїчної структури без виходу за її межі.

Пояснимо, як ендоморфізми зберігають множину  $S$  всередині себе.

Ендоморфізми зберігають множину  $S$  всередині себе, оскільки вони відображають елементи з множини  $S$  на інші елементи цієї ж множини, не залишаючи її межі. Для кожного елемента,  $a$  з множини  $S$ , ендоморфізм  $f(a)$  також належить до множини  $S$ .

Це властивість, яка важлива для вивчення структури напівгрупи та забезпечує коректність застосування ендоморфізмів в алгебрі та математиці загалом. Ось кілька важливих аспектів того, як ендоморфізми зберігають множину  $S$ :

1. Замкнутість операції - основна властивість, яку має виконувати ендоморфізм, - це замкнутість операції. Це означає, що якщо  $a$  і  $b$  належать до множини  $S$ , то  $f(a)$  і  $f(b)$  також належать до  $S$ . Інакше кажучи, ендоморфізм не виходить за межі множини  $S$ .
2. Збереження структури - ендоморфізм зберігає структуру напівгрупи. Якщо  $a$  і  $b$  є елементами напівгрупи та вони піддаються операції  $(*)$ , то  $f(a)$  і  $f(b)$  також піддаються операції  $(*)$ , і це зберігає відношення між ними.
3. Відображення всередину напівгрупи - ендоморфізми відображають елементи всередину напівгрупи. це означає, що результат дії ендоморфізму на елементи напівгрупи не виходить за межі напівгрупи, і вони лишаються частиною цієї структури.

За допомогою ендоморфізмів можна досліджувати та аналізувати властивості напівгрупи, її підгрупи та інші алгебраїчні об'єкти, не виходячи за межі цієї структури. Це робить їх потужними інструментами для вивчення алгебраїчних систем та розв'язання математичних задач..

Асоціативність ендоморфізмів.

Подамо формальне визначення асоціативності та пояснимо її важливість в контексті ендоморфізмів.

Асоціативність - це властивість бінарної операції, що визначає, що порядок виконання операцій не впливає на результат, коли ми об'єднуємо понад два елементи.

Формально, бінарна операція  $*$  на множині  $S$  називається асоціативною, якщо для всіх  $a, b, c \in S$  виконується така рівність:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Це означає, що ми можемо групувати операції в будь-якому порядку, і результат буде однаковим.

Важливість асоціативності в контексті ендоморфізмів полягає в тому, що вона забезпечує коректність застосування ендоморфізмів до послідовностей операцій. Коли ми використовуємо ендоморфізми для відображення послідовностей елементів та операцій в напівгрупі, асоціативність допомагає нам гарантувати, що результати застосування ендоморфізмів будуть однаковими, незалежно від того, як ми групуємо операції.

Завдяки асоціативності ми можемо впевнено використовувати ендоморфізми для обробки та аналізу послідовностей операцій в напівгрупі, знаючи, що це не призведе до зміни результатів або їх порядку. Це спрощує дослідження та використання ендоморфізмів у математиці та інших науках. Пояснимо, як ендоморфізми дозволяють змінювати порядок операцій.

Ендоморфізми дозволяють змінювати порядок операцій завдяки їх здатності відображати елементи множини  $S$  на себе, зберігаючи бінарну операцію, і це дозволяє нам переставляти операції відповідно до наших потреб. Розгляньмо це більш детально:

- збереження бінарної операції: ендоморфізм  $f: S \rightarrow S$  зберігає бінарну операцію  $(*)$  на множині  $S$ , що означає, що для всіх елементів  $a$  та  $b \in S$  маємо  $f(a * b) = f(a) * f(b)$ . Це дозволяє нам використовувати

ендоморфізми для перестановки операцій, не змінюючи результату. Наприклад, якщо  $f(a) = a^2$ , то ми можемо змінити порядок операцій так:

$$f(a * b) = (a * b)^2 = a^2 * b^2 = f(a) * f(b).$$

- зміна послідовності операцій: ендоморфізми дозволяють нам змінювати послідовність операцій, зберігаючи результат. Це корисно при виконанні складних обчислень або аналізу виразів, де потрібно перегрупувати операції для спрощення обчислень. Наприклад, якщо  $f(a) = a^2$ , то ми можемо переписати вираз  $(a * b)^3$  так:

$$(a * b)^3 = (a * b) * (a * b) * (a * b) = f(a) * f(b) * f(a) * f(b) * f(a) * f(b).$$

- застосування до послідовностей операцій: ендоморфізми можуть бути застосовані до послідовностей операцій. Це дозволяє нам створювати нові послідовності операцій, які можуть включати ендоморфізми та оригінальні операції. Наприклад, якщо  $f(a) = a^2$  і  $g(a) = a + 1$ , то ми можемо створити нову послідовність операцій так:

$$h(a) = f(g(a)) = (a + 1)^2, \text{ де } f \text{ і } g \text{ застосовані послідовно.}$$

Загалом, ендоморфізми дозволяють нам гнучко маніпулювати операціями та послідовностями операцій у множині  $S$ , зберігаючи при цьому структуру та властивості цієї множини. Це робить їх корисними інструментами для вивчення та використання алгебраїчних структур.

Поняття ідемпотентності та ідентичності.

Ідемпотентність і ідентичність - це важливі поняття в теорії напівгруп та алгебрі. Розгляньмо кожне з них окремо:

Ідемпотентність - це властивість елемента алгебраїчної структури, який, коли застосовується до себе самого операцією, залишається незмінним. Формально, елемент  $a$  називається ідемпотентним, якщо  $a * a = a$ .

Приклади ідемпотентних елементів включають  $0$  і  $1$  в арифметиці дійсних чисел. Наприклад,  $0 * 0 = 0$  і  $1 * 1 = 1$ .

Ідемпотентні елементи можуть мати різне значення для різних алгебраїчних структур. Наприклад, в булевій алгебрі (де операція - це логічне множення),  $1$  є ідемпотентним, оскільки  $1 * 1 = 1$ , але  $0$  не є ідемпотентним, оскільки  $0 * 0 = 0$ .

Ідентичність - це особливий елемент алгебраїчної структури, який має властивість, що для будь-якого елемента  $a$  операції, застосування ідентичного елемента до  $a$  не змінює  $a$ . Формально, ідентичний елемент  $e$  відповідає такій умові:  $e * a = a * e = a$  для всіх  $a$  в алгебраїчній структурі.

Приклади ідентичних елементів включають  $0$  для додавання чисел і  $1$  для множення чисел в арифметиці дійсних чисел. Ідентичний елемент є важливим поняттям, оскільки він визначає нейтральний елемент в алгебраїчній операції. Він дозволяє встановити початкову точку для операції та забезпечує коректність дій в алгебраїчних структурах. Отже, ідемпотентність вказує на те, які елементи залишаються незмінними після застосування операції до них самих, тоді як ідентичність показує, який елемент є нейтральним відносно операції.

Властивість ідемпотентності ендоморфізмів стосується того, як вони впливають на елементи напівгрупи. Для розуміння цієї властивості спростімо:

- припустимо, що у нас є напівгрупа  $(S, *)$ , і ми маємо ендоморфізм  $f: S \rightarrow S$  такий, що для кожного елемента  $s$  з  $S$  виконується:

$$f(s) * s = s.$$

Ця умова означає, що застосування ендоморфізму  $f$  до елемента  $s$  не змінює  $s$ , тобто  $s$  залишається ідемпотентним під дією  $f$ . Це може бути корисно



в деяких алгебраїчних операціях або аналізі, де ми хочемо зберегти певні елементи незмінними.

Наприклад, у булевій алгебрі, де операцією є логічне множення (\*), 1 є ідемпотентним елементом, оскільки для будь-якого  $s$  з множини  $\{0, 1\}$  виконується:

$$1 * s = s.$$

Це означає, що якщо ми застосуємо логічне множення до 1 та будь-якого іншого елемента  $s$ , результат залишиться незмінним. Ця властивість ідемпотентності може бути важливою при моделюванні та аналізі логічних операцій.

У загальному випадку ідемпотентність ендоморфізмів може бути корисною в різних областях математики та природних наук, де важливо зберігати певні властивості або стани системи.

Розглянемо відображення, для яких  $f(f(a)) = f(a)$ , та їхню важливість.

Відображення, для яких виконується умова  $f(f(a)) = f(a)$ , називаються ідемпотентними відображеннями або ідемпотентами. Ця властивість має декілька важливих застосувань і може мати різноманітні інтерпретації в різних контекстах.

Розглянемо деякі з них.

Збереження стану: у деяких системах ідемпотентні відображення використовуються для збереження стану системи. Це означає, що після застосування ідемпотента до поточного стану, стан системи залишається незмінним. Це може бути корисним у ситуаціях, де важливо запобігти неконтрольованій зміні стану.

Фільтрація даних: ідемпотентні відображення можуть бути використані для фільтрації даних. Наприклад, у випадку операцій над булевими значеннями (0 або 1), ідемпотентність може бути використана для

відфільтровування даних, прибираючи артефакти або шум. Керування властивостями системи: ідемпотентні відображення можуть використовуватися для керування певними властивостями системи.

Наприклад, в інформаційних системах ідемпотентність може бути важливою для запобігання подвійним записам або подвійним операціям.

Оптимізація обчислень: В інформатиці ідемпотентні відображення можуть бути використані для оптимізації обчислень. Оскільки результат застосування ідемпотента до даного значення буде такий же, як вихідне значення, то можна уникнути додаткових обчислень.

Стійкість до помилок: Ідемпотентні відображення можуть бути корисними у системах, де важлива стійкість до помилок. Якщо введено помилково подвійну операцію, ідемпотентність може запобігти неконтрольованому збільшенню впливу помилки.

Узагальнюючи, ідемпотентні відображення мають важливі застосування в різних областях, де потрібно зберігати стан, фільтрувати дані, керувати властивостями системи, оптимізувати обчислення або забезпечувати стійкість до помилок. Вони є потужним інструментом для розв'язання різноманітних завдань у математиці, інформатиці та інших галузях.

Наведемо приклади ідемпотентних ендоморфізмів. Ось кілька прикладів ідемпотентних ендоморфізмів у різних контекстах.

Булева алгебра: у булевій алгебрі, де множення відповідає логічному "І", ідемпотентним ендоморфізмом є функція, яка завжди повертає 1 (істина). Ось приклад:

нехай  $S = \{0, 1\}$ , і маємо ендоморфізм  $f: S \rightarrow S$ , де  $f(a) = 1$  для будь-якого,  $a \in S$ . Тоді для будь-якого  $a \in S$  маємо  $f(f(a)) = f(1) = 1 = f(a)$ .

Ця функція є ідемпотентною, оскільки застосування її до будь-якого значення не змінює його. Система зберігання даних: У системах зберігання даних ідемпотентність може використовуватися для підтвердження, що записи даних не будуть подвійно внесені. Наприклад, ендоморфізм, який

перевіряє наявність запису в базі даних перед внесенням нового запису, може бути ідемпотентним.

Мережеві протоколи: у мережевих протоколах ідемпотентність може бути використана для забезпечення того, що повідомлення не будуть подвійно оброблені. Наприклад, HTTP метод GET є ідемпотентним, оскільки він не змінює стану сервера.

Фільтрація сигналів - в обробці сигналів ідемпотентність може використовуватися для фільтрації шумів або артефактів. Наприклад, фільтр, який зберігає лише стабільні значення і вилучає шум, може бути ідемпотентним. Керування станом системи: У системному адмініструванні ідемпотентність може використовуватися для керування станом системи. Наприклад, команда, яка перевіряє наявність програми перед її встановленням, може бути ідемпотентною. Це лише кілька прикладів ідемпотентних ендоморфізмів у різних областях. Ця властивість є корисною в багатьох сферах, де важливо забезпечити стійкість до подвійних операцій та зберегти стан системи або даних.

Ліва та права ідентичність.

Визначимо елементи, які зберігаються ендоморфізмами:

$$(e * a = a * e = a).$$

Елементи, які зберігаються ендоморфізмами й задовольняють умову:

$$e * a = a * e = a$$

називаються ідентичними елементами або нейтральними елементами щодо відповідного ендоморфізму.

Ці елементи мають властивість, що застосування ендоморфізму до них не змінює їхніх значень, і вони служать як елементи, що не впливають на результат дії ендоморфізму.

Наприклад, у моноїді або напівгрупі  $(S, *)$  нейтральний елемент є елементом  $e$ , таким, що для будь-якого елемента,  $a$  з  $S$  виконується:

$$e * a = a * e = a.$$

Прикладами нейтральних елементів є:

- у моноїді цілих чисел з операцією додавання, нейтральний елемент - це 0, оскільки для будь-якого цілого числа  $a$ , виконується  $0 + a = a + 0 = a$ .
- у моноїді цілих чисел з операцією множення, нейтральний елемент - це 1, оскільки для будь-якого цілого числа  $a$ , виконується  $1 * a = a * 1 = a$ .
- у множині булевих значень  $\{0, 1\}$  з операцією Логічного "І" нейтральний елемент - це 1, оскільки для будь-якого булевого значення  $a$ , виконується  $1 \text{ I } a = a \text{ I } 1 = a$ .

Ці нейтральні елементи є важливими в алгебрі та теорії груп, оскільки вони визначають нейтральний елемент для відповідної операції та забезпечують структурну основу для алгебраїчних операцій. Підсумок важливості ендоморфізмів у напівгрупах та їх роль у різних галузях науки та технології:

Ендоморфізми у напівгрупах є важливими математичними структурами, які мають значний вплив у різних галузях науки та технології. Ось підсумок їх важливості та ролі: алгебраїчна структура, ендоморфізми дозволяють вивчати алгебраїчну структуру напівгрупи. Вони визначають, як елементи напівгрупи взаємодіють між собою і як можуть бути об'єднані в алгебраїчні операції.

Криптографія: у криптографії ендоморфізми використовуються для розробки шифрів та криптографічних протоколів. Вони дозволяють

перетворювати дані таким чином, щоб вони були стійкими до розшифрування без відповідного ключа.

Теорія графів: у теорії графів ендоморфізми можуть бути використані для вивчення властивостей графів та їх структур. Вони допомагають розуміти, як графи можуть бути зв'язані та взаємодіяти між собою.

Теорія автоматів: в теорії автоматів, ендоморфізми використовуються для моделювання та аналізу автоматних систем. Вони допомагають визначити, як автомати переходять від одного стану до іншого та як вони обробляють вхідні дані.

Інформаційні технології: у сучасних інформаційних системах ендоморфізми можуть бути використані для оптимізації обробки даних та забезпечення їхньої цілісності. Вони грають важливу роль у сферах, таких як бази даних та мережеві протоколи.

Фізика та інженерія у фізичних та інженерних дослідженнях ендоморфізми можуть використовуватися для моделювання та аналізу різних систем, включаючи електричні, механічні та інші складні системи.

Загалом, ендоморфізми є важливими поняттями у математиці та відіграють важливу роль у різних наукових та технологічних доменах. Вони допомагають вивчати та розуміти алгебраїчні структури, оптимізувати процеси обробки даних та розв'язувати різноманітні завдання у великому спектрі дисциплін.

## 2.2. Вільний комутативний моногенний тріоїд

Дослідження вільного комутативного моногенного тріоїда та його ендоморфних моделей є захопливим напрямком в сучасній математиці. Нові моделі можуть виявитися корисними для подальших розвитків у теорії тріоїдів та їхніх застосувань у різних галузях науки. Розглянемо нову модель вільного комутативного моногенного тріоїда за моделлю дослідження Ю.В. Жучка [15].

Тріоїди вперше з'явилися в роботі [1] при вивченні тернарних плоских дерев. Тріоїдом називається алгебра  $(T, \dashv, \vdash, \perp)$  бінарними асоціативними операціями  $\dashv, \vdash$ , і  $\perp$  такою, що для всіх  $x, y, z \in T$ ,

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (T_1)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (T_2)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (T_3)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \quad (T_4)$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \quad (T_5)$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \quad (T_6)$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \quad (T_7)$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z). \quad (T_8)$$

Тріоїди слугують основою триалгебр [1, 16], крім того, вони узагальнюють димоїди [18] та напівгрупи.

У роботі [1] наведено конструкцію вільного тріоїда рангу 1. Пізніше було показано що вільний тріоїд рангу  $n > 1$  має подібну структуру; див., наприклад, [3]. В роботах [20, 4] запропоновано більш зручніші побудови вільного тріоїда рангу 1 і, відповідно, довільного рангу запропоновано зручніші конструкції вільного тріоїда рангу 1 і, відповідно, довільного рангу. Вільні добутки довільних тріоїдів розглянуто в [17]. Напівгрупа ендоморфізму напівгрупу ендоморфізму вільного моногенного тріоїда описано в [4].

Тріюїд  $(T, \neg, \vdash, \perp)$ , називається комутативним [21], якщо напівгрупи  $(T, \neg)$ ,  $(T, \vdash)$ , та  $(T, \perp)$  є комутативними. Конструкцію вільного комутативного тріюїда було наведеноу [21]. У цій статті ми представляємо нову модель для вільного комутативного моногенного тріюїда. Крім того, побудовано комутативне напіврозбиття, визначене на тріюїді, таке, що приєднана напівгрупа цього розшарування ізоморфному моноїду ендоморфізму вільного комутативного моногенного тріюїда.

Згадаймо побудову вільного комутативного тріюїда рангу 1, запропоновану в [21]. Не хай  $\Omega$  вільний моноїд на 3-елементній множині  $\{a, b, c\}$  з порожнім словом  $\theta$ . Як завжди  $\mathbb{N}$  позначає множину всіх натуральних чисел і  $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Позначимо через  $\ell_w$  довжину відрізка  $w \in \Omega$ . За означенням,  $\ell_\theta = 0$  і  $u^0 = \theta$  для довільного  $u_1, u_2 \in \Omega$ , не хай

$$\begin{aligned} f_{\neg}(u_1, u_2) &= a, \quad f_{\vdash}(u_1, u_2) = \begin{cases} b & \text{if } u_1 = u_2 = \theta, \\ a & \text{otherwise,} \end{cases} \\ f_{\perp}(u_1, u_2) &= \begin{cases} c & \text{if } u_1 = c^k, u_2 = c^p, k, p \in \mathbb{N}^0, \\ a & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ми ставимо

$$\overline{\Omega} = \{y^k \in \Omega \mid y \in \{a, c\}, k \in \mathbb{N}^0\} \cup \{b\}$$

і визначаємо операції  $\neg, \vdash$ , і  $\perp$  за  $\overline{\Omega}$  допомогою

$$u_1 * u_2 = f_*(u_1, u_2)^{\ell_{u_1} + \ell_{u_2} + 1}$$

Для всіх  $u_1, u_2 \in \Omega$ , і  $*$   $\in \{\neg, \vdash, \perp\}$ -одержану алгебру  $(\overline{\Omega}, \neg, \vdash, \perp)$  позначається символом  $FCT_1$ .

**Теорема 2.1.** ([21], Теорема 3.1)  $FCT_1$  є комутативним тріюїдом, вільно породженим  $\theta$ . Тут ми побудуємо ще одну модель вільного комутативного тріюїда рангу 1. Покладемо

$$\bar{\mathbb{N}} = \{\bar{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathcal{N} = \mathbb{N}^0 \cup \bar{\mathbb{N}} \cup \{1\},$$

Де  $1 \notin \mathbb{N}^0 \cup \bar{\mathbb{N}}$  є свіжим символом, і введемо відображення  $\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{N}^0$  by

Зараз ми зазначимо операції  $<, >, \uparrow$  на  $\mathcal{N}$  наступним чином: для всіх  $x, y \in \mathcal{N}$ ,

$$\begin{aligned} x < y &= x' + y' + 1; \\ x > y &= \begin{cases} 1 & \text{if } x = y = 0, \\ x' + y' + 1 & \text{otherwise;} \end{cases} \\ x \uparrow y &= \begin{cases} \overline{x' + y' + 1} & \text{if } x, y \in \bar{\mathbb{N}} \cup \{0\}, \\ x' + y' + 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned}$$

**Теорема 2.2.**  $FCT_1$  ізоморфній алгебрі  $(\mathcal{N}, <, >, \uparrow)$ .

Доведення означення відображення  $\xi : FCT_1 \rightarrow \mathcal{N}$  до

$$x\xi = \begin{cases} k & \text{if } x = a^k, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{if } x = \theta, \\ \bar{k} & \text{if } x = c^k, k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{if } x = b. \end{cases}$$

Зрозуміло, що  $\xi$  є бієкцією. До того, для всіх  $u, v \in FCT_1$  маємо

$$(u \dashv v)\xi = a^{\ell_u + \ell_v + 1}\xi = \ell_u + \ell_v + 1 = (u\xi)' + (v\xi)' + 1 = u\xi < v\xi.$$

Отже,  $\xi$  є гомоморфізмом напівгрупи  $(\overline{\mathbb{N}^2}, \dashv)$  на  $(\mathcal{N}, <)$ .

Якщо  $u \neq \theta$  або  $v \neq \theta$ , то, враховуючи, що  $u\xi \neq 0$  або  $v\xi \neq 0$ , отримаємо

$$(u \dashv v)\xi = a^{\ell_u + \ell_v + 1}\xi = \ell_u + \ell_v + 1 = (u\xi)' + (v\xi)' + 1 = u\xi < v\xi.$$

крім того,



$$(\theta \vdash \theta)\xi = b\xi = 1 = 0 \succ 0 = \theta\xi \succ \theta\xi.$$

Таким чином, напівгрупи  $(\overline{\Omega}, \neg)$  і  $(\mathcal{N}, <)$  ізоморфні.

Тепер нехай  $u$  або  $v$  належать  $FCT_1 \setminus \{c^k \mid k \in \mathbb{N}^0\}$ . Тоді  $u\xi$  або  $v\xi$  належить  $\mathbb{N} \cup \{1\}$  і ясно, що

$$(u \perp v)\xi = (u \neg v)\xi = u\xi < v\xi = u\xi \uparrow v\xi.$$

Крім того,

$$(c^k \perp c^\ell)\xi = c^{k+\ell+1}\xi = \overline{k+\ell+1} = \overline{k'} + \overline{\ell'} + 1 = \bar{k} \uparrow \bar{\ell} = c^k\xi \uparrow c^\ell\xi$$

для всіх  $k, \ell \in \mathbb{N}$ . Решта випадків для елементів  $c^k, c^\ell$ , де  $k \in \mathbb{N}, \ell = 0$ , або  $\ell \in \mathbb{N}, k = 0$ , або  $k = \ell = 0$ , перевіряються аналогічно. Отже,  $\xi$  є тріюїдним ізоморфізмом.

Модель  $(\mathcal{N}, <, \succ, \uparrow)$  виглядає зручнішою, ніж побудова  $FCT_1$  запропонованої в [6], оскільки всі операції  $<, \succ, \uparrow$  зводяться до додавання невід'ємних цілих чисел.

## 2.3. Моноїд ендоморфізму вільного комутативного тріюїда рангу 1

Якщо вільний комутативний тріюїд рангу 1 подано у вигляді  $(\mathcal{N}, <, >, \uparrow)$  то вільний генератор дорівнює 0. Тому кожне відображення  $\{0\} \rightarrow FCT_1$  однозначно розширюється до ендоморфізму  $FCT_1$ . Для  $x \in \mathcal{N}$ , позначимо ендоморфізм, який розширює відображення  $0 \mapsto x$  через  $\xi_x$ . Очевидно, що  $\xi_0$  є автоморфізмом тотожності  $FCT_1$ . Наступні три леми описують дію всіх нетотожних ендоморфізмів вільного комутативного моногенного тріюїда. Їх доведення зводяться до рутинних перевірок і ми їх опускаємо.

**Лема 2.3.** Для кожного  $t \in \mathbb{N}$ , ендоморфізм  $\xi_t$  з  $FCT_1$  діє наступним чином:

$$n\xi_t = \begin{cases} (n+1)t + n & \text{if } n \in \mathbb{N}^0, \\ (a+1)t + a & \text{if } n = \bar{a} \in \overline{\mathbb{N}}, \\ 2t + 1 & \text{if } n = 1. \end{cases}$$

**Лема 2.4.** Для кожного  $\bar{t} \in \overline{\mathbb{N}}$ , ендоморфізм  $\xi_{\bar{t}}$  з  $FCT_1$  діє наступним чином:

$$n\xi_{\bar{t}} = \begin{cases} \bar{t} & \text{if } n = 0, \\ (n+1)t + n & \text{if } n \in \mathbb{N}, \\ (a+1)t + a & \text{if } n = \bar{a} \in \overline{\mathbb{N}}, \\ 2t + 1 & \text{if } n = 1. \end{cases}$$

**Лема 2.5.** Ендоморфізм  $\xi_1$  з  $FCT_1$  діє наступним чином:

$$n_{\xi_1} = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 2n + 1 & \text{if } n \in \mathbb{N}, \\ 2a + 1 & \text{if } n = \bar{a} \in \bar{\mathbb{N}}, \\ 3 & \text{if } n = 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що всі ендоморфізми нетотожності тріода  $FCT_1$  не є ін'єктивними, оскільки, наприклад,  $1\xi_t = 1\xi_t$  для будь-якого  $t \in FCT_1 \setminus \{0\}$ . Таким чином, група автоморфізмів групи  $FCT_1$  є тривіальним.

Введемо дві операції  $\oplus$  та  $\odot$  на  $\mathcal{N}$ , в термінах опишемо напівгрупу ендоморфізму вільного комутативного моногенного тріюда.

Спочатку визначимо операції  $\oplus$  та  $\odot$  на  $\mathbb{N} \cup \bar{\mathbb{N}}$  наступним чином:

$$x \oplus y = \begin{cases} \overline{x' + y'} & \text{if } x, y \in \bar{\mathbb{N}}, \\ x' + y' & \text{otherwise,} \end{cases} \quad x \odot y = \begin{cases} \frac{x' \cdot y'}{x' \cdot y'} & \text{if } x, y \in \mathbb{N}, \\ \frac{x' \cdot y'}{x' \cdot y'} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Потім ми розширимо ці операції до  $\mathcal{N} = \mathbb{N} \cup \bar{\mathbb{N}} \cup \{0, 1\}$ , дозволивши

$$0 \oplus x = x \oplus 0 = x, \quad 1 \oplus y = y \oplus 1 = y' + 1$$

і

$$0 \odot x = x \odot 0 = 0, \quad 1 \odot z = z \odot 1 = z, \quad 1 \odot 1 = 1 \odot 1 = 1$$

для всіх  $x, y, z \in \mathcal{N}$ , де  $y \neq 0, z \neq 1$ .

Наступні властивості  $\oplus$  та  $\odot$  можна перевірити безпосередньо.

**Лема 2.6.** (i) Операції  $\oplus$  та  $\odot$  є асоціативними та комутативними.  
(ii) Операція  $\odot$  розподіляє на операцію  $\oplus$ .

Наслідок 1 Алгебра  $(\mathcal{N}, \oplus, \odot)$  є комутативним напіврозкладенням.

У теорії кілець кожному асоціативному кільцю  $(R, +, \cdot)$  ставиться у відповідність його приєднана напівгрупа  $(R, \circ)$ , де  $r \circ s = r + s + r s$  для всіх  $r, s \in R$ . Таку саму конструкцію можна застосувати до довільної напівгрупи. Нехай  $(\mathcal{N}, *)$ - суміжна напівгрупа напіврозбиття  $(\mathcal{N}, \oplus, \odot)$  така, що

$$x * y = (x \odot y) \oplus x \oplus y \quad (x, y \in \mathcal{N}).$$

**Теорема 2.7.** Моноїд ендоморфізму  $\text{End } FCT_1$  вільного коммутативного моногенного тріюїда  $FCT_1$  ізоморфній напівгрупі  $(\mathcal{N}, *)$ . Нагадаємо, що  $\text{End } (FCT_1) = \{\xi_x \mid x \in \mathcal{N}\}$ . Покажемо, що дія кожного ендоморфізму  $\xi_x$  на довільному  $n \in \mathcal{N}$  можна записати у вигляді

$$n\xi_x = (n \oplus 1) \odot x \oplus n.$$

Дійсно, для всіх  $t \in \mathbb{N}$  та  $n \in \mathcal{N}$ , з огляду на лему 2.3.:

$$(n \oplus 1) \odot t \oplus n = \begin{cases} (n+1)t + n = n\xi_t & \text{if } n \in \mathbb{N}^0, \\ (a+1)t + a = n\xi_t & \text{if } n = \bar{a} \in \bar{\mathbb{N}}, \\ 2t + 1 = n\xi_t & \text{if } n = 1. \end{cases}$$

Аналогічно,  $n\xi_{\bar{t}} = (n \oplus 1) \odot \bar{t} \oplus n$  для всіх  $n \in \mathcal{N}$  і  $\bar{t} \in \bar{\mathbb{N}}$ . В лемі 2.4.,

$$(n \oplus 1) \odot 1 \oplus n = \begin{cases} 1 = n\xi_1 & \text{if } n = 0, \\ 2n + 1 = n\xi_1 & \text{if } n \in \mathbb{N}, \\ 2a + 1 = n\xi_1 & \text{if } n = \bar{a} \in \bar{\mathbb{N}}, \\ 3 = n\xi_1 & \text{if } n = 1. \end{cases}$$

Нарешті,  $(n \oplus 1) \odot 0 \oplus n = n = n\xi_0$ .

Тепер визначимо бієкцію  $\Theta : \text{End } (FCT_1) \rightarrow \mathcal{N}$  by  $\xi_t \Theta = t$  for all  $\xi_t \in$

$\text{End } (FCT_1)$  Для довільного  $a \in \mathcal{N}$  та  $\varphi_k, \varphi_\ell \in \text{End } (FCT_1)$  маємо

$$\begin{aligned}
a(\varphi_k \varphi_\ell) &= (a\varphi_k)\varphi_\ell = ((a \oplus 1) \odot k \oplus a)\varphi_\ell \\
&= ((a \oplus 1) \odot k \oplus a \oplus 1) \odot \ell \oplus (a \oplus 1) \odot k \oplus a \\
&= (a \oplus 1) \odot (k \odot \ell \oplus l) \oplus (a \oplus 1) \odot k \oplus a \\
&= (a \oplus 1) \odot (k \odot \ell \oplus \ell \oplus k) \oplus a = a\varphi_{k \odot \ell \oplus k \oplus \ell}.
\end{aligned}$$

Таким чином, для всіх  $\varphi_k, \varphi_\ell \in \text{End}(FCT_1)$  маємо

$$(\varphi_k \varphi_\ell)^\Theta = \varphi_{k \odot \ell \oplus k \oplus \ell}^\Theta = \varphi_{k * \ell}^\Theta = k * \ell = \varphi_k^\Theta * \varphi_\ell^\Theta.$$

Тобто  $\Theta$  напівгруповим ізоморфізмом.

З леми 2.6. (i) та означення операції  $*$  безпосередньо випливає, що напівгрупа  $(\mathcal{N}, *)$  є комутативною. За теоремою 2.3., ендоморфізм моноїда  $\text{End}(FCT_1)$  також є комутативним. Зауважимо, що моноїди ендоморфізму вільної моногенної напівгрупи та вільної моногенної групи також є комутативними. На противагу цьому, моноїди ендоморфізму вільного моногенного кільця та вільного моногенного тріюїда [1] не є комутативними.

Ізоморфізм  $\Theta$  вказує на те, що існує взаємно однозначне відображення між напівгрупою ендоморфізмів вільного комутативного моногенного тріюїда і приєднаною напівгрупою, що визначена на відповідному натуральному комутативному напіврозшаруванні. Цей ізоморфізм визначає відношення структурної еквівалентності між цими двома напівгрупами, що дозволяє використовувати властивості однієї структури для отримання властивостей іншої.

## Висновки до розділу 2

Цей розділ роботи присвячений дослідженню напівгрупи ендоморфізмів вільних тріюїдів, зокрема, опису деяких їх важливих характеристик.

Досліджено нову модель вільного комутативного моногенного тріюїда. Висвітлено переваги нової моделі вільного комутативного моногенного тріюїда і показано, що його напівгрупу ендоморфізму можна подати як приєднану напівгрупу деякого натурального комутативного напівкільця, визначеного на тріюїді.

# РОЗДІЛ 3

## НАПІВГРУПИ ЕНДОМОРФІЗМІВ

### ВІЛЬНИХ МОНОГЕННИХ ТРІОЇДІВ

Тріюїди були введені Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко в [1] для вивчення тернарних планарних дерев та досліджувалися, наприклад, в [1-7]. Для зручності нагадаємо, що непорожня множина  $T$  з трьома асоціативними операціями  $\dashv$ ,  $\vdash$  та  $\perp$ , є *тріюїдом*, якщо  $(T, \dashv, \vdash)$  — дімоноїд і для всіх  $x, y, z \in T$  виконуються умови:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \quad (T4)$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \quad (T5)$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \quad (T6)$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \quad (T7)$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \quad (T8)$$

Основним предметом досліджень цього розділу є вільні тріюїди, зокрема, вільні тріюїди рангу 1. Взагалі, вільні алгебри одиничної розмірності відіграють важливу роль при дослідженні будови вільних алгебр довільної розмірності. Знаючи будову вільних однопороджених алгебр деякого многовиду і конструкцію вільного добутка, можна побудувати вільний об'єкт у цьому многовиді, оскільки будь-яка вільна алгебра є вільним добутком відповідних вільних однопороджених алгебр.

У цьому розділі визначено всі ендоморфізми вільного тріюїда рангу 1. Побудовано напівгрупу, яка ізоморфна моноїду ендоморфізмів вільного моногенного тріюїда, і наведено абстрактну характеристику для моноїдів ендоморфізмів вільних тріюїдів рангу 1.

### 3.1. Ендоморфізми вільного тріюїда рангу 1

Має місце таке твердження.

**Лема 3.1.** Для кожного  $(s, T) \in Ft_1$  перетворення  $\xi_{s,T}$  вільного тріюїда  $Ft_1$ , що визначене умовою  $(n, A)\xi_{s,T} = (ns, (A - 1)s + T)$ , є мономорфізмом.

*Доведення.* Візьмемо довільні пари  $(s, T)$ ,  $(n, A)$  і  $(m, B)$  з  $Ft_1$ . Маємо

$$\begin{aligned} ((n, A) \dashv (m, B))\xi_{s,T} &= (n + m, A)\xi_{s,T} = \\ &= ((n + m)s, (A - 1)s + T) = \\ &= (ns, (A - 1)s + T) \dashv (ms, (B - 1)s + T) = \\ &= (n, A)\xi_{s,T} \dashv (m, B)\xi_{s,T} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} ((n, A) \vdash (m, B))\xi_{s,T} &= (n + m, B + n)\xi_{s,T} = \\ &= ((n + m)s, (B + n - 1)s + T) = \\ &= (ns, (A - 1)s + T) \vdash (ms, (B - 1)s + T) = \\ &= (n, A)\xi_{s,T} \vdash (m, B)\xi_{s,T} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} ((n, A) \perp (m, B))\xi_{s,T} &= (n + m, A \cup (B + n))\xi_{s,T} = \\ &= ((n + m)s, ((A \cup (B + n)) - 1)s + T) = \\ &= ((n + m)s, ((A - 1)s + T) \cup (B + n - 1)s + T) = \\ &= (ns, (A - 1)s + T) \perp (ms, (B - 1)s + T) = \\ &= (n, A)\xi_{s,T} \perp (m, B)\xi_{s,T}. \end{aligned}$$

Отже,  $\xi_{s,T} \in \text{End}(Ft_1)$  для всіх  $(s, T) \in Ft_1$ .

Якщо  $(n, A)\xi_{s,T} = (m, B)\xi_{s,T}$  для деяких  $(n, A), (m, B) \in Ft_1$ , тоді

$$(ns, (A - 1)s + T) = (ms, (B - 1)s + T),$$

звідки  $n = m$ . Користуючись тим, що  $|t - t'| < s$  для всіх  $t, t' \in T$ , отримаємо  $A = B$ . Таким чином,  $\xi_{s,T}$  — мономорфізм для всіх  $(s, T) \in Ft_1$ .

□



**Лема 3.2.** Нехай  $\xi$  — ендоморфізм вільного тріюїда  $Ft_1$  такий, що  $(1, \{1\})\xi = (s, T)$ . Тоді для всіх  $n, a \in N$ , де  $n \geq a$ , маємо

$$(n, \{a\})\xi = (ns, (a-1)s + T).$$

*Доведення.* По-перше, індукцією по  $a$  покажемо, що для всіх  $(a, \{a\}) \in Ft_1$  виконується

$$(a, \{a\})\xi = (as, (a-1)s + T).$$

Для  $a = 1$  це очевидно, а для  $a = 2$  маємо

$$(2, \{2\})\xi = ((1, \{1\}) \vdash (1, \{1\}))\xi = (s, T) \vdash (s, T) = (2s, s + T).$$

Припустимо, що  $(n, \{n\})\xi = (ns, (n-1)s + T)$  для деяких  $n \in N$ ,  $n \geq 3$ . Далі для  $a = n + 1$  отримаємо

$$\begin{aligned} (n+1, \{n+1\})\xi &= ((n, \{n\}) \vdash (1, \{1\}))\xi = \\ &= (n, \{n\})\xi \vdash (1, \{1\})\xi = (ns, (n-1)s + T) \vdash (s, T) = \\ &= ((n+1)s, ns + T). \end{aligned}$$

Тому за індукцією  $(a, \{a\})\xi = (as, (a-1)s + T)$  для всіх  $a \in N$ .

Отже, для всіх  $(n, \{a\}) \in Ft_1$ , де  $n \geq a$ ,

$$\begin{aligned} (n, \{a\})\xi &= ((a, \{a\}) \dashv (n-a, \{n-a\}))\xi = \\ &= (a, \{a\})\xi \dashv (n-a, \{n-a\})\xi = \\ &= (as, (a-1)s + T) \dashv ((n-a)s, (n-a-a)s + T) = \\ &= (ns, (a-1)s + T). \end{aligned} \quad \square$$

**Лема 3.3.** Для кожного  $(n, A) \in Ft_1$ , де  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $k \geq 2$  і  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ , маємо

$$(n, A) = (a_2 - 1, \{a_1\}) \perp (a_3 - a_2, \{1\}) \perp \dots \perp (n - a_k + 1, \{1\}).$$

*Доведення.* Доведемо це твердження індукцією по  $k$ . Для  $k = 2$

$$(a_2 - 1, \{a_1\}) \perp (n - a_2 + 1, \{1\}) = (n, \{a_1, a_2\}).$$

Припустимо, що умова леми виконується для всіх  $k \in N$ ,  $2 < k < n$ .

Тоді для всіх  $a_{k+1} \in N$  таких, що  $a_{k+1} > a_k$  та  $A \cup \{a_{k+1}\} \in U(I_n)$ , маємо

$$(n, \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}) = (a_{k+1} - 1, A) \perp (n - a_{k+1} + 1, \{1\}).$$

Оскільки  $(a_{k+1} - 1, A) \in Ft_1$ ,  $|A| = k$ , тому за індуктивним припущенням

$$(a_{k+1} - 1, A) = (a_2 - 1, \{a_1\}) \perp (a_3 - a_2, \{1\}) \perp \cdots \perp (a_{k+1} - a_k, \{1\}).$$

З останніх двох рівностей випливає, що лема виконується для всіх  $(n, A) \in Ft_1$  з потужністю  $|A| \geq 2$ .  $\square$

**Лема 3.4.** Нехай  $\xi$  — ендоморфізм вільного тріюїда  $Ft_1$  такий, що  $(1, \{1\})\xi = (s, T)$ . Тоді для всіх  $(n, A) \in Ft_1$ , де  $|A| \geq 2$ , маємо

$$(n, A)\xi = (ns, (A - 1)s + T).$$

*Доведення.* Доведемо цю лему індукцією по  $|A|$ . Нехай  $(n, A) \in Ft_1$ , де  $|A| = 2$ . Використовуючи лему 3.3 отримуємо

$$\begin{aligned} (n, \{a_1, a_2\})\xi &= ((a_2 - 1, \{a_1\}) \perp (n - a_2 + 1, \{1\}))\xi = \\ &= (a_2 - 1, \{a_1\})\xi \perp (n - a_2 + 1, \{1\})\xi = \\ &= ((a_2 - 1)s, (a_1 - 1)s + T) \perp ((n - a_2 + 1)s, T) = \\ &= (ns, ((a_1 - 1)s + T) \cup ((a_2 - 1)s + T)) = \\ &= (ns, (\{a_1, a_2\} - 1)s + T). \end{aligned}$$

Припустимо, що умова леми має місце для всіх  $(n, A) \in Ft_1$ , де  $A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}$  і  $2 < k < n$ . Користуючись лемою 3.3 та індуктивним припущенням, для всіх  $a_{k+1} \in N$  таких, що  $a_{k+1} > a_k$  і  $A \cup \{a_{k+1}\} \in U(I_n)$ , маємо

$$\begin{aligned} (n, \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\})\xi &= ((a_{k+1} - 1, A) \perp (n - a_{k+1} + 1, \{1\}))\xi = \\ &= (a_{k+1} - 1, A)\xi \perp (n - a_{k+1} + 1, \{1\})\xi = \\ &= ((a_{k+1} - 1)s, (A - 1)s + T) \perp ((n - a_{k+1} + 1)s, T) = \\ &= (ns, ((A - 1)s + T) \cup ((a_{k+1} - 1)s + T)) = \\ &= (ns, (\{a_1, a_2, a_{k+1}\} - 1)s + T). \end{aligned}$$

Таким чином, лема виконується для всіх  $(n, A) \in Ft_1$ ,  $|A| \geq 2$ .  $\square$

Тепер розглянемо бінарну операцію  $*$  на множині  $N \times U(N)$ :

$$(n, A) * (m, B) = (nm, (A - 1)m + B).$$

Якщо  $n \geq a$ ,  $m \geq b$  для деяких  $a \in A$ ,  $b \in B$ , то  $nm = (n - 1)m + m \geq (a - 1)m + b$ . Тому операція  $*$  замкнена на множині  $P = \bigcup_{k \in N} (\{k\} \times U(I_k))$ , і

отже, алгебра  $(P, *)$  — напівгрупа.

Одним з ключових результатів, отриманих у цьому розділі, є наступна теорема.

**Теорема 3.5.** (i) Для кожного  $(s, T) \in Ft_1$  перетворення  $\xi_{s,T}$  вільного тріюїда  $Ft_1$ , визначене за правилом:  $(n, A)\xi_{s,T} = (ns, (A - 1)s + T)$ , є мономорфізмом. І навпаки, кожний ендоморфізм тріюїда  $Ft_1$  має вище зазначений вигляд.

(ii) Моноїд ендоморфізмів  $End(Ft_1)$  ізоморфний напівгрупі  $(P, *)$ .

Доведення. (i) Випливає з лем 3.1, 3.2 і 3.4.

(ii) Визначимо бієкцію  $\Upsilon$  моноїда ендоморфізмів  $End(Ft_1)$  у напівгрупу  $(P, *)$  за правилом:

$$\xi_{s,T}\Upsilon = (s, T) \text{ для всіх } \xi_{s,T} \in End(Ft_1).$$

Нехай  $\xi_{s,T}, \xi_{p,Q} \in End(Ft_1)$  і  $(n, A) \in Ft_1$ . Тоді

$$\begin{aligned} (n, A)\xi_{s,T}\xi_{p,Q} &= (ns, (A - 1)s + T)\xi_{p,Q} = \\ &= (nsp, (As - s + T - 1)p + Q) = \\ &= (nsp, (A - 1)sp + (Tp - p + Q)) = \\ &= (n, A)\xi_{sp, Tp-p+Q}. \end{aligned}$$

Таким чином,  $\xi_{s,T}\xi_{p,Q} = \xi_{sp, Tp-p+Q}$ , і отже,

$$\begin{aligned} (\xi_{s,T}\xi_{p,Q})\Upsilon &= \xi_{sp, Tp-p+Q}\Upsilon = (sp, Tp - p + Q) = \\ &= (s, T) * (p, Q) = \xi_{s,T}\Upsilon * \xi_{p,Q}\Upsilon. \end{aligned}$$

□

Для зручності будемо ототожнювати елементи моноїда  $End(Ft_1)$  з відповідними елементами напівгрупи  $(P, *)$ .

Очевидно, що група автоморфізмів моногенного тріюїда  $Ft_1$  є тривіальною.

### 3.2. Абстрактні характеристики моноїда ендоморфізмів

Спочатку покажемо, що напівгрупа  $End(Ft_1)$  може бути представлена у вигляді напіврешітки деяких її піднапівгруп. Нехай

$$S_0 = \{(n, A) \in P \mid n > |A|, A \neq \{1\}\},$$

$$S_1 = \{(1, \{1\})\}, S_2 = (N \setminus \{1\}) \times \{\{1\}\} \text{ і}$$

$$S_3 = \{(n, \{n\}) \mid n \in N, n \neq 1\}.$$

Зрозуміло, що кожна з множин  $S_i$ ,  $0 \leq i \leq 3$ , є піднапівгрупою  $End(Ft_1)$ . Через  $(\Omega, )$ , де  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ , позначимо таку напіврешітку, що 0 є нулем, 1 — одиницею і  $23 = 0$ .

**Твердження 3.6.** *Моноїд  $End(Ft_1)$  є напіврешіткою  $(\Omega, )$  напівгруп  $S_i$ ,  $i \in \Omega$ . Більш того,  $S_2$  і  $S_3$  ізоморфні вільній комутативній напівгрупі на зліченій нескінченній множині вільних породжуючих, що є простими числами.*

*Доведення.* Визначимо відображення  $\eta$  моноїда  $End(Ft_1)$  на  $(\Omega, )$  за правилом:

$$(n, A)\eta = i, \text{ якщо } (n, A) \in S_i \text{ } (0 \leq i \leq 3).$$

Безпосередня перевірка показує, що  $\eta$  є гомоморфізмом, а  $S_2, S_3$  і  $(N \setminus \{1\}, \cdot)$  — ізоморфні напівгрупи.  $\square$

Через  $T(S)$  позначається оболонка зсувів напівгрупи  $S$ , а через  $T_0(S)$  — її внутрішня частина. Добре відомо, що коли напівгрупа  $S$  є слабо редуковною, тоді  $S \cong T_0(S)$ .

Тепер дамо абстрактну характеристику моноїда ендоморфізмів вільного тріюїда рангу 1.

**Теорема 3.7.** *Довільна напівгрупа  $S$  ізоморфна моноїду ендоморфізмів  $End(Ft_1)$  вільного тріюїда  $Ft_1$  тоді й тільки тоді, коли  $S$  містить щільно вкладений ідеал, ізоморфний напівгрупі  $S_0$ .*

*Доведення.* Аналогічно доведенню теореми 5.8.

### 3.3. Проблема визначеності тріюдів ендоморфізмами

Розглянемо спочатку таке твердження.

**Твердження 3.8.** *Нехай  $X$  — одноелементна множина,  $Y$  — довільна множина та існує ізоморфізм  $\theta: \text{End}(Ft(X)) \rightarrow \text{End}(Ft(Y))$ . Тоді вільні тріюїди  $(Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$  і  $(Ft(Y), \neg, \vdash, \perp)$  є ізоморфними.*

*Доведення.* Припустимо, що  $|\bar{Y}| \geq 2$ . Позначимо через  $E(Ft(X))$  та  $E(Ft(Y))$  множини ідемпотентів моноїда  $\text{End}(Ft(X))$  і  $\text{End}(Ft(Y))$  відповідно. Оскільки  $\theta$  — ізоморфізм, то  $E(Ft(X))\theta = E(Ft(Y))$ .

Очевидно, що  $(n, A) \in E(Ft(X))$  — ідемпотент тоді й тільки тоді, коли  $(n^2, (A - 1)n + A) = (n, A)$ , звідки  $n = 1, A = \{1\}$ . Таким чином,  $|E(Ft(X))| = 1$ .

Зафіксуємо  $y \in \bar{Y}$  і визначимо перетворення  $\varphi_y$  множини  $\bar{Y}$  за правилом:  $t\varphi_y = y$  для всіх  $t \in \bar{Y}$ . Далі розширимо  $\varphi_y$  до перетворення  $\Phi_y$  тріюїда  $Ft(Y)$ , поклавши

$$\begin{aligned} a_1 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_j \dots \bar{a}_k \dots a_n \Phi_y &= (\bar{a}_1 \varphi_y \vdash \bar{a}_2 \varphi_y \vdash \dots \vdash \bar{a}_{i-1} \varphi_y) \vdash \\ &\vdash (\bar{a}_i \varphi_y \neg \bar{a}_{i+1} \varphi_y \neg \dots \neg \bar{a}_{j-1} \varphi_y) \perp \\ &\perp (\bar{a}_j \varphi_y \neg \bar{a}_{j+1} \varphi_y \neg \dots \neg \bar{a}_{j+s} \varphi_y) \perp \\ &\perp \dots \perp (\bar{a}_k \varphi_y \neg \bar{a}_{k+1} \varphi_y \neg \dots \neg \bar{a}_n \varphi_y) \end{aligned}$$

для всіх  $a_1 \dots \bar{a}_i \dots \bar{a}_j \dots \bar{a}_k \dots a_n \in Ft(Y)$ , де  $1 \leq i \leq j \leq \dots \leq k \leq n$ .

Оскільки  $\Phi_y$  визначається так само, як гомоморфізм вільного тріюїда рангу 1 в довільний тріюїд з одним породжуючим елементом, то  $\Phi_y$  є ендоморфізмом  $(Ft(Y), \neg, \vdash, \perp)$ , крім того,  $\Phi_y^2 = \Phi_y$ .

Беручи до уваги тотожний автоморфізм з  $\text{End}(Ft(Y))$ , отримаємо  $|E(Ft(Y))| \geq 3$ , що суперечить умові  $E(Ft(X))\theta = E(Ft(Y))$ . Отже,  $|\bar{Y}| = 1$  і тріюїди  $(Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$  та  $(Ft(Y), \neg, \vdash, \perp)$  ізоморфні.

□

Далі покажемо, що вільні тріюїди довільного рангу також визначаються їх ендоморфізмами.

Нехай  $F_X = (Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$  — вільний тріюїд на  $X$  і  $u \in Ft(X)$ . З твердження 1.1 розділу 1 випливає, що довільний ендоморфізм  $\Phi$  тріюїду  $F_X$  має вигляд:

$$u\Phi = (\overline{u_1^{(0)}} \vdash \overline{u_2^{(0)}} \vdash \dots \vdash \overline{u_{k_{(0)}}^{(0)}} \varphi) \vdash (\overline{u_1^{(1)}} \varphi \dashv \overline{u_2^{(1)}} \varphi \dashv \dots \dashv \overline{u_{k_1}^{(1)}} \varphi) \perp \\ \perp \dots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \varphi \dashv \overline{u_2^{(j)}} \varphi \dashv \dots \dashv \overline{u_{k_j}^{(j)}} \varphi)$$

і

$$u\Phi = (\overline{u_1^{(1)}} \vdash \overline{u_2^{(1)}} \vdash \dots \vdash \overline{u_{k_{(1)}}^{(1)}} \varphi) \vdash (\overline{u_1^{(2)}} \varphi \dashv \overline{u_2^{(2)}} \varphi \dashv \dots \dashv \overline{u_{k_2}^{(2)}} \varphi) \perp \\ \perp \dots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \varphi \dashv \overline{u_2^{(j)}} \varphi \dashv \dots \dashv \overline{u_{k_j}^{(j)}} \varphi),$$

де  $\varphi: \bar{X} \rightarrow Ft(X)$  — будь-яке відображення.

Ендоморфізм  $\theta_u \in \text{End}(F_X)$  називається *константним*, якщо  $\bar{x}\theta_u = u$  для всіх  $\bar{x} \in \bar{X}$

**Лема 3.9.** (i) Ендоморфізм  $f$  вільного тріюїда  $F_X$  є константним тоді й тільки тоді, коли  $\psi f = f$  для всіх  $\psi \in \text{Aut}(F_X)$ .

(ii) Ендоморфізм  $f$  вільного тріюїда  $F_X$  є константним ідемпотентом тоді й тільки тоді, коли  $f = \theta_{\bar{x}}$  для деякого  $\bar{x} \in \bar{X}$ .

*Доведення.* (i) Очевидно.

(ii) Нехай  $f \in \text{End}(F_X)$  — константний ідемпотентний ендоморфізм. Тоді  $f = \theta_u$ ,  $u \in Ft(X)$ , і  $\theta_u = \theta_u \theta_u = \theta_{u\theta_u}$ . Це означає, що  $u = u\theta_u$ , звідси  $l(u) = 1$ ,  $u \in \bar{X}$ .

Навпаки, для всіх  $w \in Ft(X)$  і  $\bar{x} \in \bar{X}$  отримаємо:

$$w\theta_{\bar{x}}^2 = (\overline{u_1^{(0)}} \overline{u_2^{(0)}} \dots \overline{u_{k_0}^{(0)}} \overline{u_1^{(1)}} \overline{u_2^{(1)}} \dots \overline{u_{k_1}^{(1)}} \overline{u_1^{(2)}} \overline{u_2^{(2)}} \dots \overline{u_{k_2}^{(2)}} \dots \overline{u_1^{(j)}} \overline{u_2^{(j)}} \dots \overline{u_{k_j}^{(j)}}) \theta_{\bar{x}}^2 = \\ = (\underbrace{xx \dots x}_{k_0} \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_1} \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_2} \dots \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_j}) \theta_{\bar{x}} = \underbrace{xx \dots x}_{k_0} \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_1} \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_2} \dots \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_j} = w\theta_{\bar{x}},$$

або

$$\begin{aligned}
w\theta_{\bar{x}}^2 &= (\overline{u_1^{(1)}} u_2^{(1)} \dots u_{k_1}^{(1)} \overline{u_1^{(2)}} u_2^{(2)} \dots u_{k_2}^{(2)} \dots \overline{u_1^{(j)}} u_2^{(j)} \dots u_{k_j}^{(j)}) \theta_{\bar{x}}^2 = \\
&= (\underbrace{xx \dots x}_{k_1} \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_2} \dots \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_j}) \theta_{\bar{x}} = \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_1} \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_2} \dots \underbrace{\bar{x}x \dots x}_{k_j} = w\theta_{\bar{x}}.
\end{aligned}$$

Отже,  $\theta_{\bar{x}}^2 = \theta_{\bar{x}}$ , що завершує доведення леми.  $\square$

**Теорема 3.10.** Нехай  $F_X = (Ft(X), \neg, \vdash, \perp)$  та  $F_Y = (Ft(Y), \neg, \vdash, \perp)$  — вільні тріюїди такі, що  $End(F_X) \cong End(F_Y)$ . Тоді  $F_X$  і  $F_Y$  ізоморфні.

*Доведення.* Аналогічно доведенню теореми 5.18.  $\square$

Наприкінці відзначимо, що асоціативні триалгебри є лінійними версіями тріюїдів, тому всі отримані результати для вільного тріюїда рангу 1 виконуються також і для вільної триалгебри рангу 1. Крім того, алгебраїчна операда асоціативних триалгебр є регулярною, а це означає, що її вільні об'єкти повністю визначаються через вільний об'єкт на одному породжуючому елементі.

### Висновки до розділу 3

Цей розділ роботи присвячений дослідженню властивостей напівгрупи ендоморфізмів вільних тріюїдів.

Вивчено властивості напівгрупи ендоморфізмів вільних тріюїдів, зокрема, ендоморфізми вільних моногенних тріюїдів. Детально розглянуто вільний тріюїд будь-якого рангу та представлено тріюїд, який є ізоморфним вільному тріюїду рангу 1. Подано повний опис всіх ендоморфізмів вільних тріюїдів рангу 1 і сконструйовано напівгрупу, що є ізоморфною моноїдою ендоморфізмів вільного тріюїда. Отримано абстрактні характеристики напівгрупи ендоморфізмів вільного моногенного тріюїда. Також доведено, що напівгрупи ендоморфізмів двох вільних тріюїдів будь-якого рангу ізоморфні тоді й лише тоді, коли відповідні вільні тріюїди ізоморфні.



## ВИСНОВКИ

У цій роботі досліджено властивості вільних тріоїдів за допомогою напівгруп ендорфізмів. Представлено та досліджено конструкцію вільних тріоїдів. Проведено аналіз деяких україномовних та англomовних статей, пов'язаних з вільними триоїдами. Вивчено нову модель вільного комутативного моногенного тріоїда. Досліджено переваги цієї моделі вільного комутативного моногенного тріоїда і показано, що його напівгрупу ендоморфізмів можна подати як приєднану напівгрупу деякого натурального комутативного напівкільця, визначеного на тріоїді. Детально розглянуто вільний тріоїд довільного рангу та представлено тріоїд, який є ізоморфним вільному тріоїду рангу 1. Крім того, показано, що напівгрупи ендоморфізмів двох вільних тріоїдів будь-якого рангу ізоморфні тоді й лише тоді, коли відповідні вільні тріоїди ізоморфні.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Loday J.-L. Trialgebras and families of polytopes / J.-L. Loday, M. O. Ronco // *Contemp. Math.* – 2004. – Vol. 346. – P. 369 – 398.
2. Zhuchok A.V. Trioids / A.V. Zhuchok // *Asian-European J. Math.* – 2015. Vol. 8, no. 4. – 1550089 (23 p.)
3. Жучок Ю. В. Об определмости свободных триоидов полугруппами эндоморфизмов / Ю. В. Жучок // *Доповіді НАН України.* – 2015. № 4. С. 7 – 11.
4. Zhuchok Yu. V. The endomorphism monoid of a free trioid of rank 1 / Yu. V. Zhuchok // *Algebra Universalis.* – 2016. – Vol. 76, no. 3. – P. 355 – 366.
5. Zhuchok Yu. V. The endomorphism monoid of a free trioid of rank 1 / Yu. V. Zhuchok // *Intern. Conf. „Mal'tsev Meeting”: Abstracts.* – Novosibirsk, 2014. – P. 114.
6. Novelli J.-C. Construction de trigubres dendriformes / J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* – 2006. – Vol. 342, no. 6. – P. 365 – 369.
7. Casas J. M. Trialgebras and Leibniz 3-algebras / J. M. Casas // *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* – 2006. – Vol. 12. – P. 165 – 178.
8. Pozhidaev A. P. Dialgebras and related triple systems / A. P. Pozhidaev // *Sib. Math. J.* – Vol. 49. – P. 696 – 708.
9. Zhuchok A. V. Some congruences on trioids / A. V. Zhuchok // *J. Math. Sci. (N. Y.).* – 2012. – Vol. 187. – P. 138 – 145.
10. Zhuchok A. V. Tribands of subtrioids / A. V. Zhuchok // *Proc. Inst. Appl. Math. Mech.* – 2010. – Vol. 21. – P. 98 – 106.
11. Жучок А. В. Вільні тріоїди / А. В. Жучок // *Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки.* – 2010. – Т. 4. – С. 23 – 26.
12. Zhuchok Yul. V. Free  $\mathcal{A}$ -nilpotent trioids / Yul. V. Zhuchok // *Matematychni Studii.* – 2015. – Vol. 43, no. 1. – P. 3 – 11.

13. Zhuchok A. V. Semilattice decompositions of trioids // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. – 2013. – Vol. 71, no. 1. – P. 130 – 134.
14. Zhuchok A. V. Semiretractions of trioids / A. V. Zhuchok // Ukr. Math. Journal. – 2014. – V. 66, no. 2. – P. 218 – 231.
15. Жучок Ю.В. Нові моделі для вільного комутативного моногенного тріюїда та його ендоморфного моноїда: научна стаття Semigroup Forum (2022). 105:575–581 <https://doi.org/10.1007/s00233-022-10313-2>.
16. Casas, J.M.: Trialgebras and Leibniz 3-algebras. Boletín de la Sociedad Matematica Mexicana 12,165–178 (2006).
17. Huang, J., Chen, Yu., Zhang, Z.: Free products of trialgebras. arXiv:2107.00459
18. Loday, J.-L.: Dialgebras, In: Dialgebras and related operads. Lect. Notes Math. 1763, 7–66 (2001).
19. Zhuchok, A.V.: Trioids. Asian-Eur. J. Math. 8(4), article no. 1550089 (2015).
20. Zhuchok, A.V.: Free commutative trioids. Semigroup Forum 98(2), 355–368 (2019).
- 21 . Zhuchok Yu. V. Monoids of endomorphisms of relational structures / Yu. V. Zhuchok // The 4th Novi Sad Algebr. Conf. & the workshop „Semigroups and Applic.”: Abstracts. – Novi Sad, 2013. – P. 53.
22. Жучок А. В. Елементи теорії дімоноїдів / А. В. Жучок – К. : Ін-т математики, 2014. – 304 с. – (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України ; т. 98.
23. Жучок Ю. В. Ендоморфізми вільних добутків скінченних напівгруп / Ю. В. Жучок, Л. В. Кіртадзе // Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 4. – С. 27 – 30.
24. Zhuchok Yu. V. The endomorphism monoid of a free dimonoid of rank 1 / Yu. V. Zhuchok // XV Intern. Scient. Kravchuk Conf. – Vol. 2. Algebra. Geometry. Analysis: Abstracts. – Kyiv, 2014. – P. 35.
25. Zhuchok Yu. V. On automorphisms of the endomorphism semigroup of a free abelian dimonoid / Yu. V. Zhuchok // Тези доповідей Міжн. наук. конфер. 314

«Дискретна математика, алгебра та їх застосування»: тези докл. - Мінськ, 2015.  
С. 87 – 88.

26. Zhuchok A. V. Free commutative dimonoids / A. V. Zhuchok // Algebra Discrete Math. – 2009. – Vol. 9, no. 1. – P. 109 – 119.

27. Кліффорд А. Алгебраїчна теорія напівгруп / А.Кліффорд, Г.Престон. - М.: Мир, 1972. - Т. 1 - 285.

28. Zhuchok Yu. V. On digroup congruences on a free dimonoid / Yu. V. Zhuchok // Book of abstracts of the Intern. Algebr. Conf. dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Abstracts. – Kyiv, 2014. – P. 101.

29. Zhuchok Yu. V. Endomorphism semigroups of some free products / Yu. V. Zhuchok // 8th Intern. Algebr. Conf. in Ukraine: Abstracts. – Luhansk, 2011. – P. 283 – 284.

30. Zhuchok Yu. V. Representations of ordered dimonoids by binary relations / Yu. V. Zhuchok // Intern. Math. Conf. devoted to the 70th anniversary of Prof. V. Kirichenko: Abstracts. – Mykolaiv, 2012. – P. 178.

31. Zhuchok Yu. V. The monoid of endomorphisms of disconnected hypergraphs / Yu. V. Zhuchok // Algebra Discrete Math. – 2013. – Vol. 16, no. 1. – P. 134 – 150.